



NGUYÊN HÀM

TÍCH PHÂN

BÀI ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

DẠNG 1: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH

Câu 1: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên I và $\int_0^3 f(x)dx = F(3) - G(0) + a$, ($a > 0$). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x)$, $y = G(x)$, $x = 0$, $x = 3$. Khi $S = 15$ thì a bằng

Lời giải

Trả lời: 5

Do $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên I nên

$$G(x) = F(x) + C, \forall x \in I, \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

$$\text{Mặt khác } \int_0^3 f(x)dx = F(3) - F(0)$$

$$\text{Lại có } \int_0^3 f(x)dx = F(3) - G(0) + a, \text{ suy ra } G(0) = F(0) + a.$$

$$\text{Do đó } a = C \Rightarrow G(x) = F(x) + a, \forall x \in I$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x)$, $y = G(x)$, $x = 0$, $x = 3$.

$$S = \int_0^3 |G(x) - F(x)|dx \Leftrightarrow 15 = \int_0^3 |a|dx \stackrel{a>0}{\Leftrightarrow} 15 = 3a \Leftrightarrow a = 5.$$

Câu 2: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên I và $\int_0^5 f(x)dx = F(5) - G(0) + a$ ($a > 0$). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x)$, $y = G(x)$, $x = 0$ và $x = 5$. Khi $S = 20$ thì a bằng

Lời giải

Trả lời: 4

Vì $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên I nên

$$\int_0^5 f(x)dx = F(5) - F(0) = G(5) - G(0) = F(5) - G(0) + a \Rightarrow \begin{cases} F(0) = G(0) - a \\ F(5) = G(5) - a \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } F(x) = G(x) - a \Leftrightarrow F(x) - G(x) = -a$$

S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 5$ nên

$$S = \int_0^5 |F(x) - G(x)| dx = \int_0^5 |-a| dx = \int_0^5 |a| dx = \int_0^5 a dx = ax \Big|_0^5 = 5a \quad (a > 0).$$

Mà $S = 20$ nên $5a = 20 \Leftrightarrow a = 4$.

Câu 3: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên I và

$$\int_0^4 f(x) dx = F(4) - G(0) + a \quad (a > 0). \text{ Gọi } S \text{ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường}$$

$y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 4$. Khi $S = 8$ thì a bằng

Lời giải

Trả lời: 2

$F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên I nên $\int_0^4 f(x) dx = F(4) - F(0)$.

Mà $\int_0^4 f(x) dx = F(4) - G(0) + a \quad (a > 0)$ nên

$$F(4) - F(0) = F(4) - G(0) + a \Leftrightarrow G(0) = F(0) + a.$$

Lại có $G(x)$ cũng là nguyên hàm của $f(x)$ trên I nên $G(x) = F(x) + a \quad \forall x \in I$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 4$ là

$$S = \int_0^4 |F(x) - G(x)| dx = \int_0^4 a dx = 4a = 8 \Rightarrow a = 2.$$

Câu 4: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên I và

$$\int_0^2 f(x) dx = F(2) - G(0) + a \quad (a > 0). \text{ Gọi } S \text{ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường}$$

$y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 2$. Khi $S = 6$ thì a bằng

Lời giải

Trả lời: 3

Do $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên I nên $F(x) - G(x) = C$ với C là hằng số.

$$\text{Ta có } S = \int_0^2 |F(x) - G(x)| dx = \int_0^2 |C| dx = |C| \cdot \int_0^2 1 dx = 2|C| = 6 \Rightarrow |C| = 3 \quad (*).$$

$$\text{Ta lại có: } F(0) - G(0) = C \Leftrightarrow F(0) = G(0) + C$$

Theo đề bài:

$$\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0) = F(2) - (G(0) + C) = F(2) - G(0) - C = F(2) - G(0) + a.$$

Suy ra: $a = -C$ mà $a > 0$ nên $C < 0 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra: $C = -3 \Rightarrow a = -C = 3$.

Vậy: $a = 3$.

Câu 5: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên I và

$\int_0^4 f(x)dx = F(4) - G(0) + 2m (m > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 4$. Khi $S = 8$ thì m bằng:

Lời giải

Trả lời: 1

Vì $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên giả sử trên $\square$, ta có:

$$G(x) = F(x) + C \text{ suy ra } G(0) = F(0) + C$$

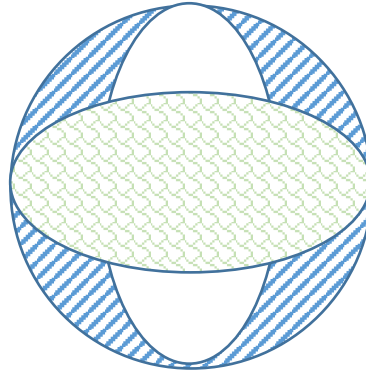
$$\int_0^4 f(x)dx = F(4) - G(0) + 2m \Leftrightarrow F(4) - F(0) = F(4) - F(0) - C + 2m \Leftrightarrow C = 2m$$

Vậy $G(x) = F(x) + 2m$ trên $\square$.

$$\text{Ta có } S = \int_0^4 |F(x) - G(x)|dx = \int_0^4 2mdx = 2mx \Big|_0^4 = 8m,$$

Mà $S = 8$ nên $m = 1$.

Câu 6: Cho đường tròn có đường kính bằng 4 và 2 Elip lần lượt nhận 2 đường kính vuông góc nhau của đường tròn làm trục lớn, trục bé của mỗi Elip đều bằng 1. Diện tích S phần hình phẳng ở bên trong đường tròn và bên ngoài 2 Elip bằng. ((kết quả làm tròn đến hàng phần mười))



Lời giải

Trả lời: 3,7

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

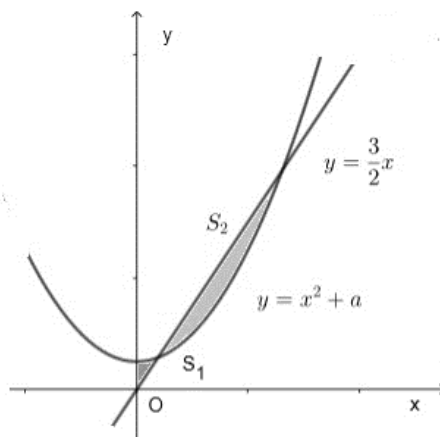
Hai Elip lần lượt có phương trình: $(E_1): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và $(E_2): \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$

Tọa độ giao điểm của hai Elip trong góc phần tư thứ nhất là nghiệm phương trình:

$$x^2 + \frac{1 - \frac{x^2}{4}}{4} = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Diện tích hình phẳng cần tìm: } S = \pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 2 \cdot 1 - 4 \int_0^{\frac{2\sqrt{5}}{5}} \left(2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \right) dx = 3,71$$

Câu 7: Cho đường thẳng $y = \frac{3}{2}x$ và parabol $y = x^2 + a$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 0,4

Giải toán:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + a = \frac{3}{2}x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2a = 0$

Để phương trình có 2 nghiệm dương thì $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{9}{16} \end{cases}$.

Gọi hai nghiệm đó là $0 < x_1 < x_2$ thì $x_2 = \frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4}$.

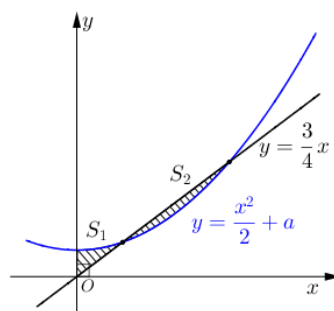
Để $S_1 = S_2$ khi và chỉ khi $\int_0^{x_2} \left(x^2 + a - \frac{3}{2}x \right) dx = 0$

Ta có: $\int_0^{x_2} \left(x^2 + a - \frac{3}{2}x \right) dx = 0 \Leftrightarrow \frac{x_2^3}{3} + ax_2 - \frac{3}{4}x_2^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4} \right)^3}{3} + a \cdot \frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4} \right)^2 = 0$$

Giải nhanh bằng máy tính cho kết quả $x = 0,421875 \approx 0,4$.

Câu 8: Cho đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 0,2

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4a = 0$.

Theo đề bài phương trình có hai nghiệm $0 < x_1 < x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3}{2} & (*) \\ x_1 x_2 = 2a & (**) \end{cases}$.

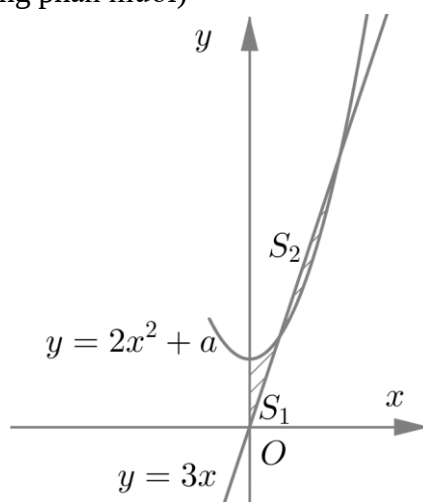
$$S_1 - S_2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_1} \left| \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a \right| dx + \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a \right| dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_2} \left| \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a \right| dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + ax \right|_0^{x_2} = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{3}{8}x_2^2 + ax_2 \right| = 0 \Rightarrow a = -\frac{x_2^2}{6} + \frac{3x_2}{8} \quad (***)$$

Từ (*) $\Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} - x_2$, thay vào (**) $\Rightarrow \left(\frac{3}{2} - x_2\right)x_2 = -\frac{x_2^2}{6} + \frac{3x_2}{8} \Leftrightarrow \frac{2x_2^2}{3} - \frac{3x_2}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{9}{8}$

$\xrightarrow{(***)} a = \frac{27}{128} \approx 0,2$.

Câu 9: Cho đường thẳng $y = 3x$ và parabol $2x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 0,8

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2 + a = 3x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + a = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

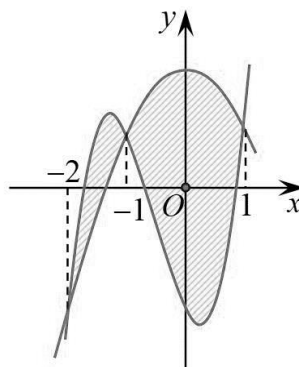
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 8a > 0 \\ \frac{a}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{9}{8} \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{9}{8}.$$

Ta được nghiệm của phương trình là $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8a}}{4}$.

$$\text{Ta có } S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3 - \sqrt{9 - 8a}}{4}} (2x^2 + a - 3x) dx = - \int_{\frac{3 - \sqrt{9 - 8a}}{4}}^{\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4}} (2x^2 + a - 3x) dx.$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}} (2x^2 + a - 3x) dx + \int_{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}}^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}} (2x^2 + a - 3x) dx = 0 \\
 &\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}} (2x^2 - 3x + a) dx = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + ax \right) \Big|_0^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{2}{3} \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} \right)^3 - \frac{2}{3} \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} \right)^2 + a \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} \right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} \right) \left[\frac{2}{3} \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} \right) + a \right] = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} = 0 \text{ (vn)} \\ \frac{2}{3} \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} \right) + a = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \frac{2}{3} \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} \right) + a = 0 \xrightarrow[\text{Shift Solve}]{\text{CASIO}} a = \frac{27}{32} \approx 0,8
 \end{aligned}$$

Câu 10: Cho hai hàm số $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2 ; -1 ; 1 .



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 6,2

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$ là

$$ax^3 + bx^2 + cx - 2 = dx^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow a^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = 0. \quad (*)$$

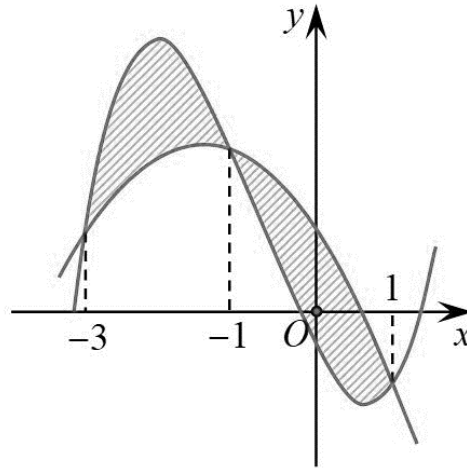
Do đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại ba điểm suy ra phương trình $(*)$ có ba nghiệm $x = -2$; $x = -1$; $x = 1$. Ta được

$$ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = k(x+2)(x+1)(x-1).$$

Khi đó $-4 = -2k \Rightarrow k = 2$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int_{-2}^1 |2(x+2)(x+1)(x-1)| dx = \frac{37}{6}$.

Câu 11: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$. Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



Lời giải

Trả lời: 4

Cách 1:

Xét phương trình $ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2} = dx^2 + ex + 1 \Leftrightarrow ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} = 0$ có 3

$$\text{nghiệm lần lượt là } -3; -1; 1 \text{ nên suy ra } \begin{cases} -27a + 9(b-d) - 3(c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ -a + (b-d) - (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ a + (b-d) + (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-d = \frac{3}{2} \\ a = \frac{1}{2} \\ c-e = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x)) dx + \int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx \\ &\Leftrightarrow S = \int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right) dx - \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right) dx = 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

Cách 2:

Ta có: $f(x) - g(x) = a(x+3)(x+1)(x-1)$.

$$\text{Suy ra } a(x+3)(x+1)(x-1) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-d)x - \frac{3}{2}$$

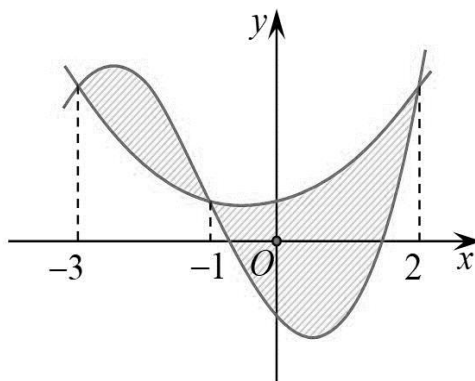
$$\text{Xét hệ số tự do suy ra: } -3a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó: } f(x) - g(x) = \frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1).$$

$$\text{Diện tích bằng: } S = \int_{-3}^{-1} [f(x) - g(x)] dx + \int_{-1}^2 [g(x) - f(x)] dx$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2} \int_{-3}^{-1} (x+3)(x+1)(x-1) dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^2 (x+3)(x+1)(x-1) dx = 4.$$

Câu 12: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ và $g(x) = dx^2 + ex + \frac{1}{2}$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3; -1; 2$.



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 5,3

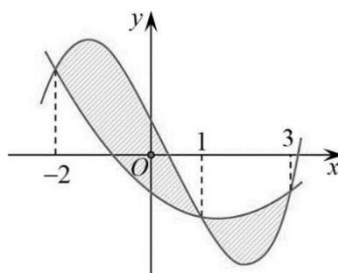
Vì phương trình $f(x) - g(x) = 0$ có 3 nghiệm $-3; -1; 2$ nên

$$f(x) - g(x) = a(x+3)(x-2)(x+1).$$

$$\text{So sánh hệ số tự do ta được } -6a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}. \text{ Do đó } S = \int_{-3}^2 \left| \frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2) \right| dx = \frac{253}{48}$$

.

Câu 13: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{3}{4}$ và $g(x) = dx^2 + ex - \frac{3}{4}$, ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; 1; 3$. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 5,3

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$$ax^3 + bx^2 + cx + \frac{3}{4} = dx^2 + ex - \frac{3}{4} \Leftrightarrow ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x + \frac{3}{2} = 0.$$

$$\text{Đặt } h(x) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x + \frac{3}{2}$$

Dựa vào đồ thị ta có $h(x) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x + \frac{3}{2}$ có ba nghiệm là $x = -2; x = 1; x = 3$.

Với $x = -2$ ta có $-8a + 4(b-d) - 2(c-e) = -\frac{3}{2}$, (1).

Với $x = 1$ ta có $a + (b-d) + (c-e) = -\frac{3}{2}$, (2).

Với $x = 3$ ta có $27a + 9(b-d) + 3(c-e) = -\frac{3}{2}$, (3).

$$\text{Từ (1), (2) và (3) ta có } \begin{cases} -8a + 4(b-d) - 2(c-e) = -\frac{3}{2} \\ a + (b-d) + (c-e) = -\frac{3}{2} \\ 27a + 9(b-d) + 3(c-e) = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b-d = -\frac{1}{2} \\ c-e = -\frac{5}{4} \end{cases}.$$

Hay ta có

$$S = \int_{-2}^3 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^1 \left| \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} \right| dx + \int_1^3 \left| \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} \right| dx = \frac{63}{16} + \frac{4}{3} = \frac{253}{48}.$$

Câu 14: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

Lời giải

Trả lời: 25

Ta có $v_B(t) = \int a \cdot dt = at + C$, $v_B(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v_B(t) = at$.

Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$$S_A = \int_0^{25} \left(\frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t \right) dt = \left(\frac{1}{300}t^3 + \frac{13}{60}t^2 \right) \Big|_0^{25} = \frac{375}{2}.$$

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là

$$S_B = \int_0^{15} at \cdot dt = \frac{at^2}{2} \Big|_0^{15} = \frac{225a}{2}.$$

Ta có $\frac{375}{2} = \frac{225a}{2} \Leftrightarrow a = \frac{5}{3}$.

Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_B(15) = \frac{5}{3} \cdot 15 = 25$ (m/s).

Câu 15: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

Lời giải

Trả lời: 30

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t) = \int a dt = at + C$ mà $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$.

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{18} \left(\frac{1}{120} t^2 + \frac{58}{45} \right) dt = \int_0^{15} at dt \Leftrightarrow 225 = a \cdot \frac{225}{2} \Leftrightarrow a = 2$$

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t) = 2 \cdot 15 = 30 (m/s)$.

Câu 16: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

Lời giải

Trả lời: 10

Xét phương trình $-5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau 2s ô tô dừng hẳn.

Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là

$$s = \int_0^2 (-5t + 10) dt = \left(-\frac{5}{2} t^2 + 10t \right) \Big|_0^2 = 10m.$$

Câu 17: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150} t^2 + \frac{59}{75} t (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a (m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

Lời giải

Trả lời: 16

Quãng đường chất điểm A đi từ đầu đến khi B đuổi kịp là $S = \int_0^{15} \left(\frac{1}{150} t^2 + \frac{59}{75} t \right) dt = 96 (m)$.

Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t) = \int a dt = at + C$.

Tại thời điểm $t = 3$ vật B bắt đầu từ trạng thái nghỉ nên $v_B(3) = 0 \Leftrightarrow C = -3a$.

Lại có quãng đường chất điểm B đi được đến khi gặp A là

$$S_2 = \int_3^{15} (at - 3a) dt = \left(\frac{at^2}{2} - 3at \right) \Big|_3^{15} = 72a (m).$$

Vậy $72a = 96 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3} (m/s^2)$.

Tại thời điểm đuổi kịp A thì vận tốc của B là $v_B(15) = 16 (m/s)$.

Câu 18: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

Lời giải

Trả lời: 15

Thời gian tính từ khi A xuất phát đến khi bị B đuổi kịp là 15 giây, suy ra quãng đường đi được

$$\text{tới lúc đó là } \int_0^{15} v(t)dt = \int_0^{15} \left(\frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t \right) dt = \left(\frac{1}{540}t^3 + \frac{11}{36}t^2 \right) \Big|_0^{15} = 75(m).$$

Vận tốc của chất điểm B là $y(t) = \int a \cdot dt = at + C$ (C là hằng số); do B xuất phát từ trạng thái nghỉ nên có $y(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$;

Quãng đường của B từ khi xuất phát đến khi đuổi kịp A là

$$\int_0^{10} y(t)dt = 75 \Leftrightarrow \int_0^{10} at \cdot dt = 75 \Leftrightarrow \frac{a \cdot t^2}{2} \Big|_0^{10} = 75 \Leftrightarrow 50a = 75 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Vậy có $y(t) = \frac{3t}{2}$; suy ra vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $y(10) = 15(m/s)$.

Câu 19: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 108

Vận tốc của vật chuyển động là $v = s' = -\frac{3}{2}t^2 + 12t = f(t)$

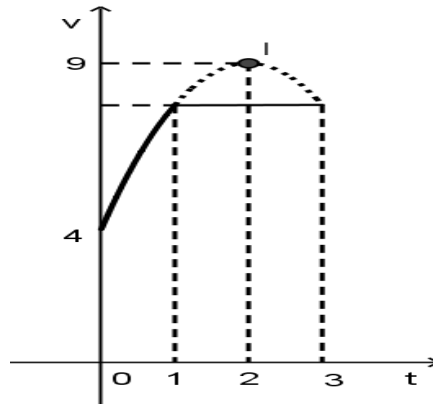
Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0; 6]$

Ta có $f'(t) = -3t + 12 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \in [0; 6]$

$$f(0) = 0; f(4) = 24; f(6) = 18$$

Vậy vận tốc lớn nhất là $24(m/s)$.

Câu 20: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

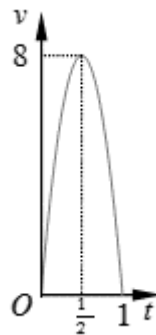
Trả lời: 21,6

Gọi phương trình của parabol $v = at^2 + bt + c$ ta có hệ như sau:
$$\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 4 \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Với $t = 1$ ta có $v = \frac{31}{4}$.

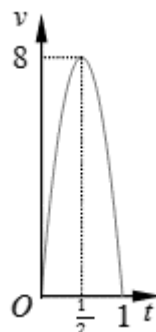
Vậy quãng đường vật chuyển động được là $s = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4 \right) dt + \int_1^3 \frac{31}{4} dt = \frac{259}{12} \approx 21,583$

Câu 21: Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v phụ thuộc vào thời gian t có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 4,5



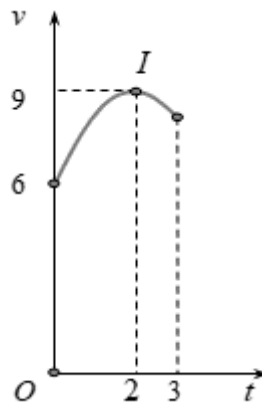
Gọi parabol là $(P): y = ax^2 + bx + c$. Từ hình vẽ ta có (P) đi qua $O(0; 0)$, $A(1; 0)$ và điểm $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$.

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = 32 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Suy ra $(P): y = -32x^2 + 32x$.

Vậy quãng đường người đó đi được là $s = \int_0^{\frac{3}{4}} (-32x^2 + 32x) dx = 4,5$.

Câu 22: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 24,8

Gọi $v(t) = at^2 + bt + c$.

Đồ thị $v(t)$ là một phần parabol có đỉnh $I(2;9)$ và đi qua điểm $A(0;6)$ nên

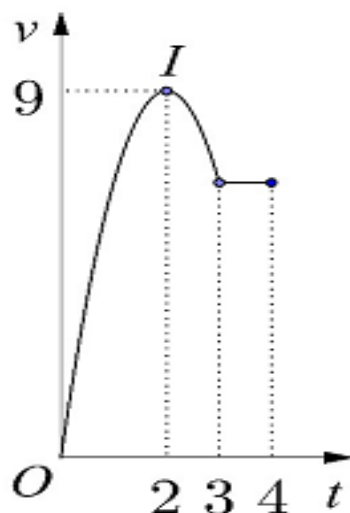
$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 9 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = 3 \\ c = 6 \end{cases}.$$

Tìm được $v(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6$

$$\text{Vậy } S = \int_0^3 \left(-\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6\right) dt = 24,75$$

Câu 23: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v phụ thuộc thời gian t có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian

còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



Lời giải

Trả lời: 27

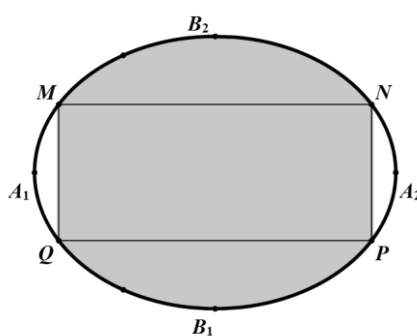
Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$.

Vì (P) qua $O(0;0)$ và có đỉnh $I(2;9)$ nên dễ tìm được phương trình là $y = \frac{-9}{4}x^2 + 9x$.

Ngoài ra tại $x = 3$ ta có $y = \frac{27}{4}$

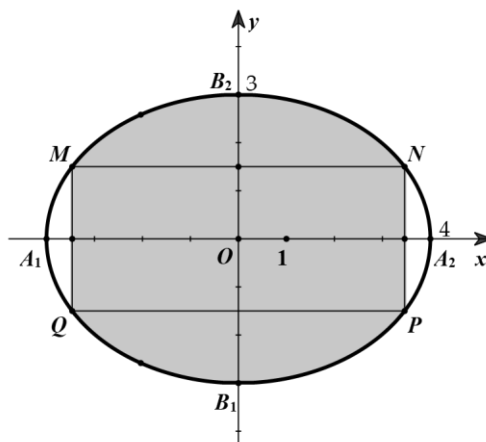
Vậy quãng đường cần tìm là: $S = \int_0^3 \left(\frac{-9}{4}x^2 + 9x \right) dx + \int_3^4 \frac{27}{4} dx = 27 \text{ (km)}$.

Câu 24: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 VNĐ / m^2 và phần còn lại 100.000 VNĐ / m^2 . Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8m$, $B_1B_2 = 6m$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3m$? (đơn vị nghìn đồng)



Lời giải

Trả lời: 7322



Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\text{Với } \begin{cases} A_1A_2 = 8 = 2a \\ B_1B_2 = 6 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2}.$$

Suy ra diện tích của hình elip là $S_{(E)} = \pi a.b = 12\pi \text{ (m}^2\text{)}.$

Vì $MNPQ$ là hình chữ nhật và $MQ = 3 \rightarrow M\left(x; \frac{3}{2}\right) \in (E)$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = 12 \rightarrow M\left(-2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right); N\left(2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$$

Gọi $S_1; S_2$ lần lượt là diện tích phần bị tô màu và không bị tô màu

$$\text{Ta có: } S_2 = 4 \cdot \frac{3}{4} \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16 - x^2} dx = 3 \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16 - x^2} dx \xrightarrow{x=4\sin t} S_2 = 4\pi - 6\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

Suy ra: $S_1 = S_{(E)} - S_2 = 8\pi + 6\sqrt{3}$. Gọi T là tổng chi phí. Khi đó ta có

$$T = (4\pi - 6\sqrt{3}) \cdot 100 + (8\pi + 6\sqrt{3}) \cdot 200 \approx 7.322.000.$$

Câu 25: Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - 2x$ với $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1, 2, 3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 5,9

Vì hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1, 2, 3$ nên hàm số $y' = f'(x) - g'(x) = 4ax^3 + 3(b-m)x^2 + 2(c-n)x + 3$ có ba nghiệm là $-1, 2, 3$. Suy ra, tồn tại số thực k để $y' = k(x+1)(x-2)(x-3)$.

Ta có $f'(0) = 3$ nên $k = \frac{1}{2}$. Do đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và

$$y = g'(x) \text{ bằng: } \int_{-1}^3 |y'(x)| dx = \int_{-1}^3 \left| \frac{1}{2} (x+1)(x-2)(x-3) \right| dx = \frac{71}{12}.$$

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3x$ và hàm số $g(x) = mx^3 + nx^2 - x$; với $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1; 2$ và 3 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 7,9

Vì hàm số bậc bốn $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1; 2$ và 3 nên phương trình hàm số $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $-1; 2$ và 3 .

Hay

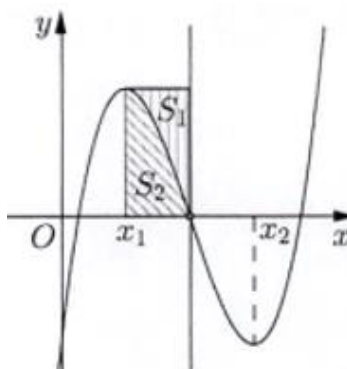
$$\begin{aligned} f'(x) - g'(x) &= A(x+1)(x-2)(x-3) \\ \Leftrightarrow 4ax^3 + 3(b-m)x^2 + 2(c-n)x + 4 &= A(x+1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

Đồng nhất thức hệ số tự do ta thấy $4 = 6A \Leftrightarrow A = \frac{2}{3}$

Công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^3 |f'(x) - g'(x)| dx = \int_{-1}^3 \left| \frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3) \right| dx \\ &= \int_{-1}^2 \left| \frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3) \right| dx + \int_2^3 \left| \frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3) \right| dx \\ &= \left| \int_{-1}^2 \frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3) dx \right| + \left| \int_2^3 \frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3) dx \right| \\ &= \frac{15}{2} + \frac{7}{18} = \frac{71}{9} \end{aligned}$$

Câu 27: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi điểm S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



Lời giải

Trả lời: 0,6

Rõ ràng kết quả bài toán không đổi nếu ta tịnh tiến đồ thị sang trái cho điểm uốn trùng gốc tọa độ O .

Gọi $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ là hàm số khi đó thì dễ thấy $g(x)$ lẻ nên có ngay $b = d = 0$ và $g(x) = ax^3 + cx$ có hai điểm cực trị tương ứng là $-1, 1$, cũng là nghiệm của $3ax^2 + c = 0$.

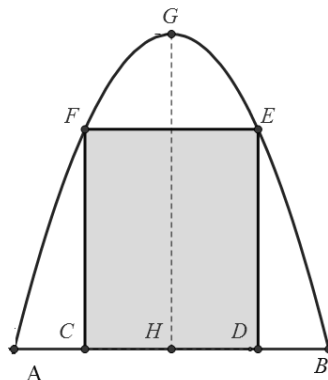
Từ đó dễ dàng có $g(x) = k(x^3 - 3x)$ với $k > 0$.

Xét diện tích hình chữ nhật $S_1 + S_2 = |(-1) \times g(-1)| = 2k$. Ngoài ra,

$$S_2 = k \int_{-1}^0 |x^3 - 3x| dx = \frac{5}{4}k.$$

Vì thế $S_1 = 2k - \frac{5k}{4} = \frac{3k}{4}$ và $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5}$.

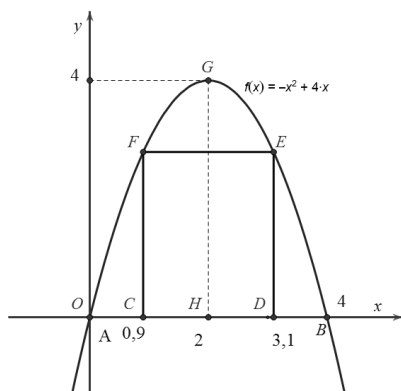
Câu 28: Cho Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng/ m^2 , còn các phần để trống thì trang trí hoa có giá là 900000 đồng/ m^2 . Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên bằng bao nhiêu? (đơn vị nghìn đồng)



Lời giải

Trả lời: 11441

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox , A trùng với gốc O . Khi đó parabol có đỉnh $G(2;4)$ và đi qua gốc tọa độ.



Giả sử phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Vì parabol có đỉnh là $G(2;4)$ và đi qua điểm $O(0;0)$ nên ta có

$$\begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Suy ra phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

Diện tích của cả công là $S = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} \text{ (m}^2\text{)}.$

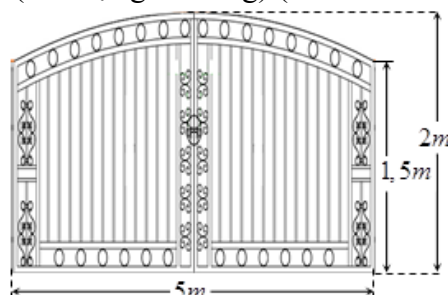
Mặt khác chiều cao $CF = DE = f(0,9) = 2,79\text{(m)}; CD = 4 - 2.0,9 = 2,2 \text{ (m)}.$

Diện tích hai cánh công là $S_{CDEF} = CD.CF = 6,138 \text{ (m}^2\text{)}.$

Diện tích phần để trống là $S_1 = S - S_{CDEF} = \frac{32}{3} - 6,138 = \frac{6793}{1500} \text{ (m}^2\text{)}.$

Vậy tổng số tiền để làm công là $6,138.1200000 + \frac{6793}{1500}.900000 = 11441400 \text{ đồng}.$

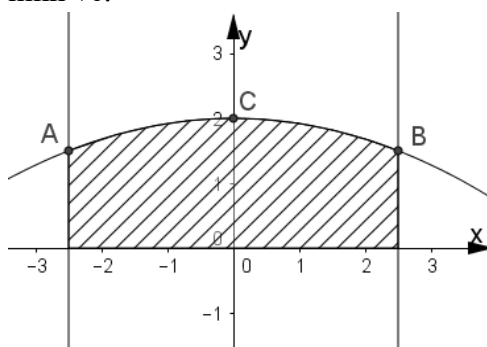
Câu 29: Bác Bình muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá 1m^2 của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi bác Bình phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy. (đơn vị nghìn đồng) (làm tròn đến hàng nghìn)



Lời giải

Trả lời: 6416

Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Trong đó $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$.

Giả sử đường cong phía trên là một Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$, với $a; b; c \in \mathbb{R}$.

Do Parabol đi qua các điểm $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a(-2,5)^2 + b(-2,5) + c = 1,5 \\ a(2,5)^2 + b(2,5) + c = 1,5 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình Parabol là $y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$.

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2,5$; $x = 2,5$.

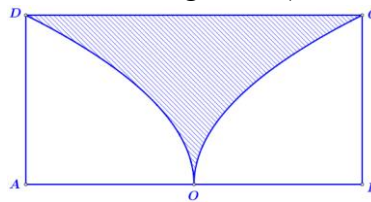
$$\text{Ta có } S = \int_{-2,5}^{2,5} \left(-\frac{2}{25}x^2 + 2 \right) dx = \left(-\frac{2}{25} \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-2,5}^{2,5} = \frac{55}{6}.$$

Vậy bác Bình phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là

$$S \times 700000 = \frac{55}{6} \times 700000 \approx 6.417.000.$$

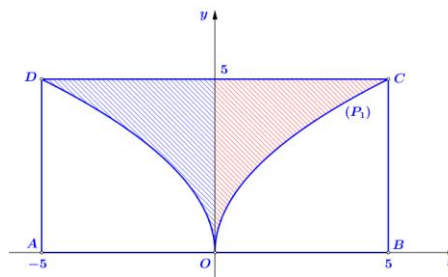
DẠNG 2: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH

Câu 30: Từ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 10$ cm và chiều rộng $BC = 5$ cm; Người ta cắt bỏ miền (R) được giới hạn bởi cạnh CD của hình chữ nhật và hai nửa đường parabol có chung đỉnh là trung điểm của cạnh AB , chúng lần lượt đi qua hai đầu mút C, D của hình chữ nhật đó. Phần còn lại cho quay quanh trục AB để tạo nên một đồ vật làm trang trí, thể tích của vật trang trí đó bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 393



Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục AB ta được khối trụ có

- Bán kính đáy $r = BC = 5$ cm.
- Chiều cao $h = AB = 10$ cm.

Do đó thể tích khối trụ này có thể tích $V_1 = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 250\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

Mặt khác, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ thì $C(5;5)$ và parabol bên phải trục Ox có dạng $(P_1): y^2 = 2px$.

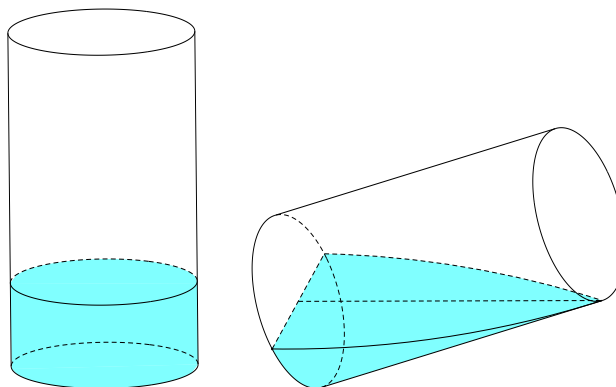
$$\text{Ta có } C \in (P_1) \Leftrightarrow p = \frac{5}{2} \Rightarrow (P_1): y^2 = 5x \text{ hay } y = \sqrt{5x}.$$

Khi đó miền (R) khi quay quanh trục Ox có thể tích

$$V_2 = 2\pi \int_0^5 [5^2 - 5x] dx = 2\pi \left(25x - \frac{5}{2}x^2 \right) \Big|_0^5 = 125\pi$$

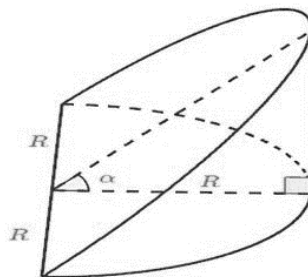
Vậy thể tích phần còn lại là $V = V_1 - V_2 = 125\pi \text{ (cm}^3\text{)} \approx 393 \text{ (cm}^3\text{)}.$

Câu 31: Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6 cm, chiều cao lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



Lời giải

Trả lời: 240



Xét thiết diện cắt dọc thủy tinh vuông góc với đường kính tại vị trí bất kỳ có:

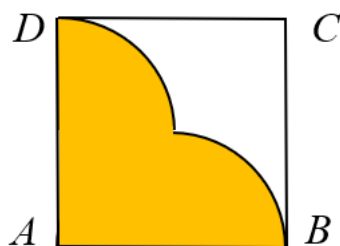
$$S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \tan \alpha \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \tan \alpha.$$

Thể tích hình cái nôm là: $V = \frac{1}{2} \tan \alpha \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha.$

Thể tích khối nước tạo thành khi nguyên cốc có hình dạng cái nôm nên $V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha.$

$$\Rightarrow V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \cdot \frac{h}{R} = 240 \text{ cm}^3.$$

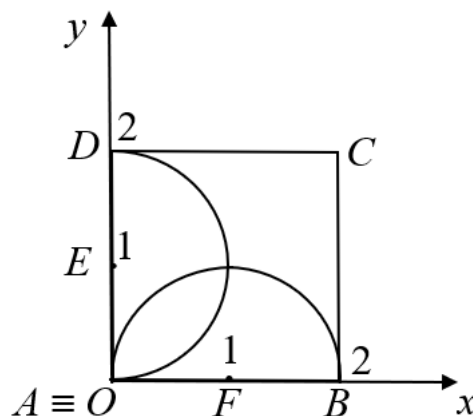
Câu 32: Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) quanh trục AB. Miền (R) được giới hạn bởi các cạnh AB, AD của hình vuông ABCD và các cung phân tư của các đường tròn bán kính bằng 1 cm với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, AB.



Tính thể tích của vật trang trí đó. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 12,3



Chọn trục Ox chứa điểm B , trục Oy chứa điểm D , và gốc tọa độ O trùng điểm A .

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, AB . Khi đó $E(0; 1), F(1; 0)$.

*Phương trình đường tròn có tâm $E(0; 1)$ và đường kính $AD = 2$ là: $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Suy ra phương trình cung trên của đường tròn tâm E là: $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$

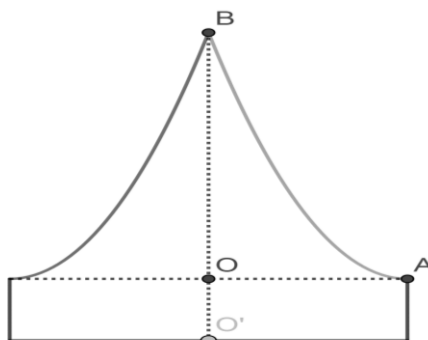
*Phương trình đường tròn có tâm $F(1; 0)$ và đường kính $AB = 2$ là: $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Suy ra phương trình cung trên của đường tròn tâm F là: $y = \sqrt{1 - (x - 1)^2}$

Vậy, thể tích vật trang trí là:

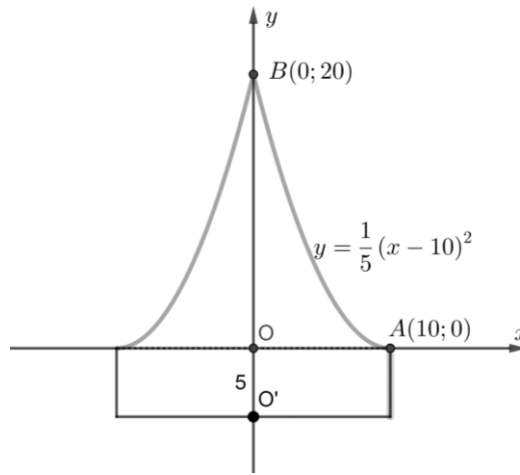
$$V = \pi \int_0^1 \left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)^2 dx + \pi \int_1^2 \left(1 - (x - 1)^2\right) dx \approx 12,3 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Câu 33: Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ “cách điệu” cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A . Thể tích của chiếc mũ bằng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 2618



Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V .

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm là V_1 .

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2 .

Ta có $V = V_1 + V_2$

$$V_1 = 5 \cdot 10^2 \pi = 500\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P): y = a(x-10)^2$.

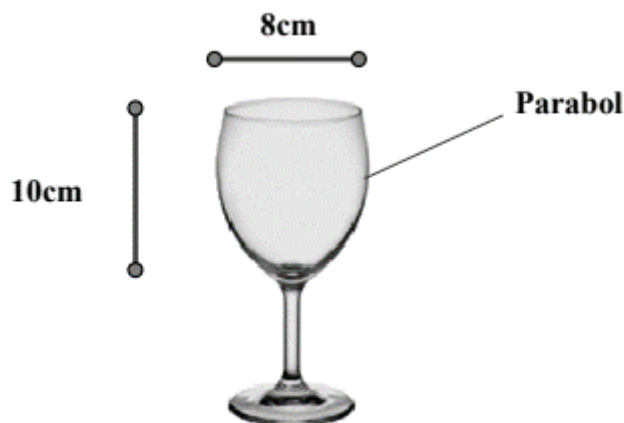
Vì (P) qua điểm $B(0; 20)$ nên $a = \frac{1}{5}$.

Do đó, $(P): y = \frac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$.

$$\text{Suy ra } V_2 = \pi \int_0^{20} (10 - \sqrt{5y})^2 dy = \pi \left(3000 - \frac{8000}{3} \right) = \frac{1000}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

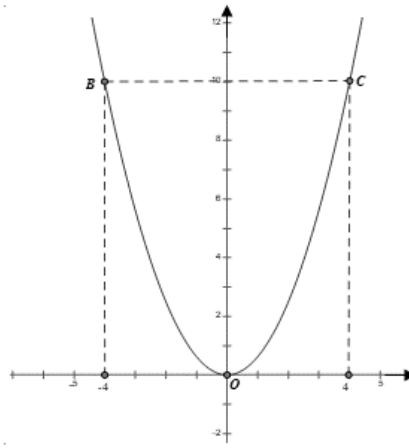
$$\text{Do đó } V = V_1 + V_2 = \frac{1000}{3} \pi + 500\pi = \frac{2500}{3} \pi \approx 2618 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Câu 34: Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được. (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

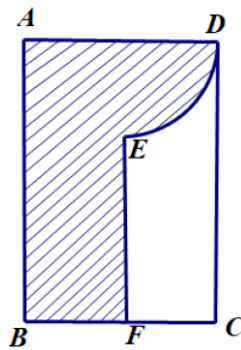
Trả lời: 251



Parabol có phương trình $y = \frac{5}{8}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{5}y$

Thể tích tối đa cốc $V = \pi \int_0^{10} \left(\frac{8}{5}y \right) dy \approx 251$.

Câu 35: Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay tạo thành khi quay miền (R) quay xung quanh trục AB. Biết ABCD là hình chữ nhật cạnh $AB = 3\text{cm}$, $AD = 2\text{cm}$; F là trung điểm của BC; điểm E cách AD một đoạn bằng 1cm.



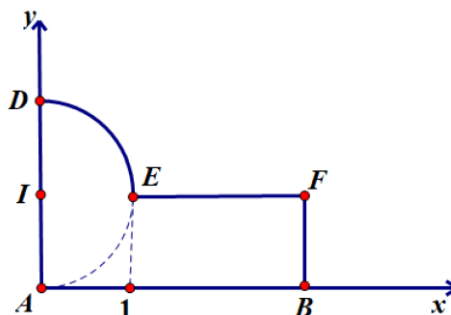
Thể tích của vật thể trang trí trên là (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 16,5

Chọn hệ trục Oxy có $O \equiv A$; $B \in Ox$; $D \in Oy$.

Ta có: $A(0;0)$; $D(0;2)$; $B(3;0)$; $E(1;1)$



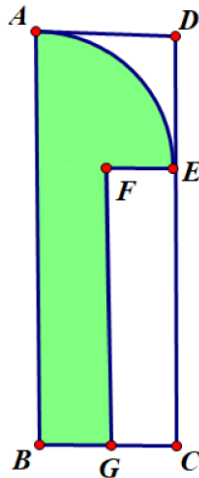
Đường tròn tâm $I(0;1)$ chứa cung ED có phương trình là: $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

Nên cung trên của đường tròn tâm I là: $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$.

Thể tích của vật thể trang trí là:

$$V = \pi \int_0^1 \left(1 + \sqrt{1-x^2}\right)^2 dx + \pi \int_1^3 1^2 dx \approx 16,5 (cm^3).$$

Câu 36: Một chiếc đỉnh tán có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi cho phần tô đậm quay xung quanh cạnh AB . Biết $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 20mm$, $AD = 6mm$, cung AE là cung một phần tư của đường tròn có bán kính bằng $6mm$, điểm F cách AB một đoạn bằng $3mm$

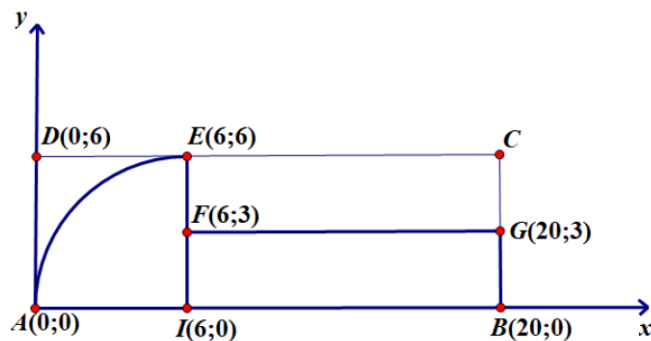


Thể tích của đỉnh tán là (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 848

Chọn hệ trục Oxy có $A \equiv O$; $B(20;0)$; $D(0;6)$.



Khi đó: F là trung điểm của EI và $I(6;0)$; $E(6;6)$; $F(6;3)$; $G(20;3)$.

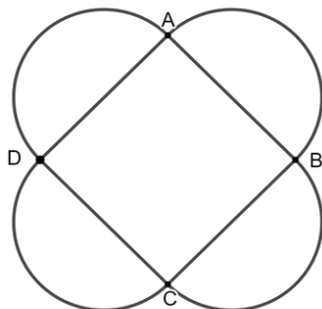
+ Đường tròn tâm $I(6;0)$ bán kính bằng 6 có phương trình là: $(x-6)^2 + y^2 = 36$.

Nên nửa cung phía trên của trục Ox có phương trình là: $y = \sqrt{36 - (x-6)^2}$.

+ Phương trình đường thẳng FG là: $y = 3$.

Vậy thể tích của đỉnh tán là: $V = \pi \int_0^6 [36 - (x-6)^2] dx + \pi \int_6^{20} 3^2 dx \approx 848,2 (mm^3)$

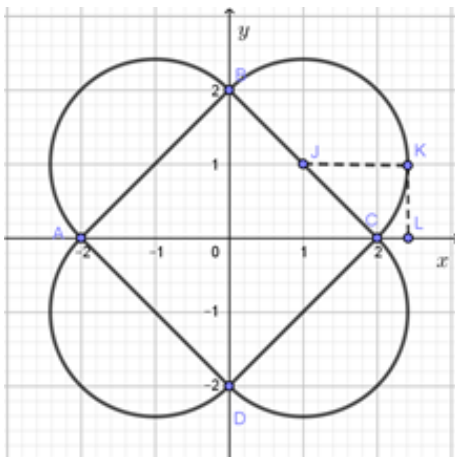
Câu 37: Trong mặt phẳng cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2\sqrt{2}$, phía ngoài hình vuông vẽ thêm bốn nửa đường tròn nhận các cạnh của hình vuông làm đường kính.



Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình trên quanh đường thẳng AC là (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 73



• Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Ta có: $J(1;1), K(\sqrt{2}+1;1), L(\sqrt{2}+1;0), C(2;0)$.

Phương trình đường tròn tâm $J(1;1)$ bán kính $JB = \sqrt{2}$ là

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2-(x-1)^2} + 1 = 1 + \sqrt{1+2x-x^2}, & \text{khi } y \geq 1 \\ y = -\sqrt{2-(x-1)^2} + 1 = 1 - \sqrt{1+2x-x^2}, & \text{khi } y < 1 \end{cases}$$

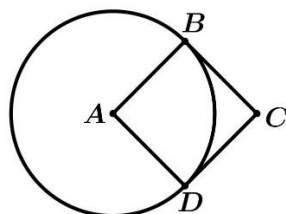
• Gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = 1 + \sqrt{1+2x-x^2}$, trục hoành, hai đường thẳng $x = 0, x = 1 + \sqrt{2}$.

Gọi (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = 1 - \sqrt{1+2x-x^2}$, trục hoành, hai đường thẳng $x = 2, x = 1 + \sqrt{2}$.

• Thể tích khối tròn xoay cần tính là:

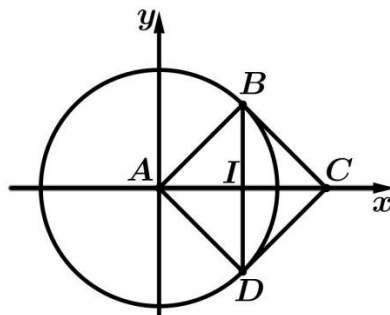
$$V = 2[V_{(H_1)} - V_{(H_2)}] = 2 \left[\pi \int_0^{1+\sqrt{2}} (1 + \sqrt{1+2x-x^2})^2 dx - \pi \int_2^{1+\sqrt{2}} (1 - \sqrt{1+2x-x^2})^2 dx \right] \approx 72,989 \approx 73.$$

Câu 38: Trên một mảnh giấy vẽ hình tròn có bán kính bằng 2, vẽ chồng lên trên đó một hình vuông có 1 đỉnh là tâm của hình tròn và 2 đỉnh khác nằm trên đường tròn. Tính thể tích khối tròn xoay tạo ra khi quay hình đó quanh trục đối xứng của nó. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 34,5



Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 = 4$.

Thể tích khối tròn xoay khi quay phần hình bên trái BD quanh trục đối xứng của nó là

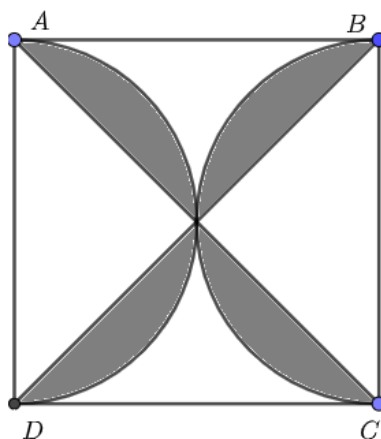
$$V_1 = \pi \int_{-2}^{\sqrt{2}} (4 - x^2) dx = \frac{(16 + 10\sqrt{2})\pi}{3}$$

Thể tích khối tròn xoay khi quay phần hình bên phải BD quanh trục đối xứng của nó là

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

Thể tích cần tìm là $V = V_1 + V_2 = \frac{(16 + 12\sqrt{2})\pi}{3} \approx 34,5$.

Câu 39: Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ cạnh $4cm$ vẽ hai đường chéo và hai nửa đường tròn đường kính là hai cạnh AD, BC cắt nhau tạo thành 4 hình cánh quạt như hình vẽ. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay 4 cánh quạt này quanh cạnh CD . (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 28,7

Đặt hệ trục tọa độ Oxy với gốc O là đỉnh D , hai tia Ox, Oy tương ứng là các tia DC, DA .

Phương trình đường tròn đường kính AD là $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

Phương trình đường tròn đường kính BC là $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$.

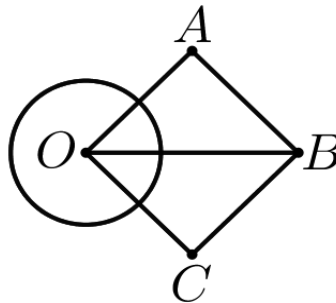
Phương trình $AC: x + y - 4 = 0$, $BD: x - y = 0$.

Thể tích cánh quạt đỉnh D quay quanh DC là $V_1 = \pi \int_0^2 x^2 dx - \pi \int_0^2 \left(2 - \sqrt{4-x^2}\right)^2 dx$.

Thể tích cánh quạt đỉnh A quay quanh DC là $V_2 = \pi \int_0^2 \left(2 + \sqrt{4-x^2}\right)^2 dx - \pi \int_0^2 (4-x)^2 dx$.

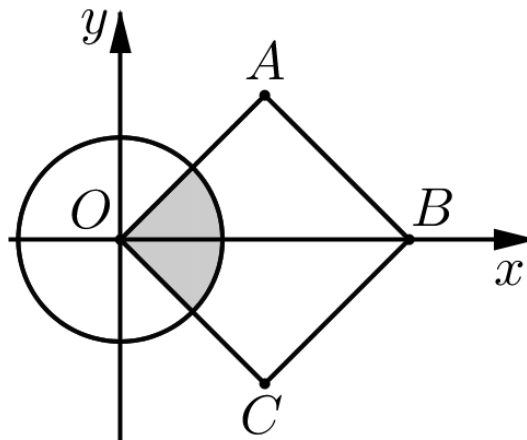
Thể tích cần tìm là $V = 2(V_1 + V_2) = 28,7 \text{ cm}^2$.

Câu 40: Cho hình tròn tâm O có bán kính $R=2$ và hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình bên xung quanh trục là đường thẳng OB . (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 76



Chọn hệ trục tọa độ Oxy có gốc tọa độ trùng O , tia Ox có giá là OB và tia Oy song song AC .

Khi đó đường tròn (O) có phương trình $x^2 + y^2 = 4$ và đường thẳng OA có phương trình $y = x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng OA và đường tròn (C) là:

$$\sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Thể tích vật thể tròn xoay khi quay phần tô đen quanh Ox là:

$$V_1 = \pi \int_0^{\sqrt{2}} x^2 dx + \pi \cdot \int_{\sqrt{2}}^2 (4-x^2) = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{(16-10\sqrt{2})\pi}{3} = \frac{(16-8\sqrt{2})\pi}{3}.$$

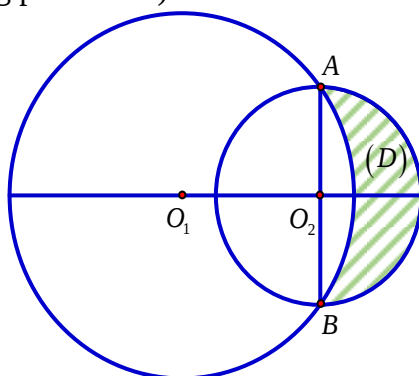
Thể tích khối tròn xoay khi quay (O) quanh Ox là khối cầu có $V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3}\pi$.

Thể tích khối tròn xoay khi quay $OABC$ quanh Ox là

$$V_3 = 2 \times \left[\frac{1}{3} \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot 2\sqrt{2} \right] = \frac{32\sqrt{2}\pi}{3}.$$

Vậy thể tích cần tính: $V = V_2 + V_3 - V_1 = \frac{16 + 40\sqrt{2}}{3} \pi = \frac{8\pi(2 + 5\sqrt{2})}{3} \approx 76.$

Câu 41: Cho hai đường tròn $(O_1; 5)$ và $(O_2; 3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2) . Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn. Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

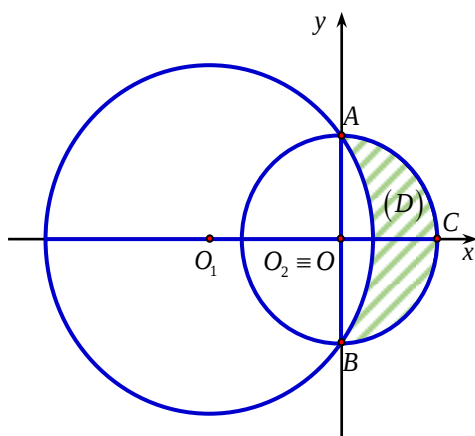
Trả lời: 41,9

Chọn hệ tọa độ Oxy với $O_2 \equiv O$, $O_2C \equiv Ox$, $O_2A \equiv Oy$.

Đoạn $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow (O_1): (x+4)^2 + y^2 = 25.$

Kí hiệu (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $(O_1): (x+4)^2 + y^2 = 25$, $Oy: x=0, x \geq 0$.

Kí hiệu (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $(O_2): x^2 + y^2 = 9$, $Oy: x=0, x \geq 0$.



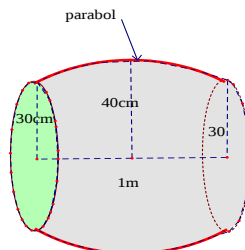
Khi đó thể tích V cần tìm chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) xung quanh trục Ox trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) xung quanh trục Ox .

Ta có $V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 3^3 = 18\pi.$

Lại có $V_1 = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 [25 - (x+4)^2] dx = \pi \left[25x - \frac{(x+4)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{14\pi}{3}.$

Do đó $V = V_2 - V_1 = 18\pi - \frac{14\pi}{3} = \frac{40\pi}{3} \approx 41,9$.

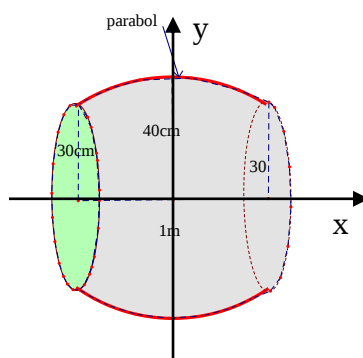
Câu 42: Một cái trống trường có bán kính các đáy là 30 cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có diện tích là $1600\pi (cm^2)$, chiều dài của trống là 1m. Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh của trống là các đường Parabol. Hỏi thể tích của cái trống là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 425

Ta có chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy là hình tròn. có bán kính r có diện tích là $1600\pi (cm^2)$, nên.

$$r^2\pi = 1600\pi \Rightarrow r = 40cm.$$

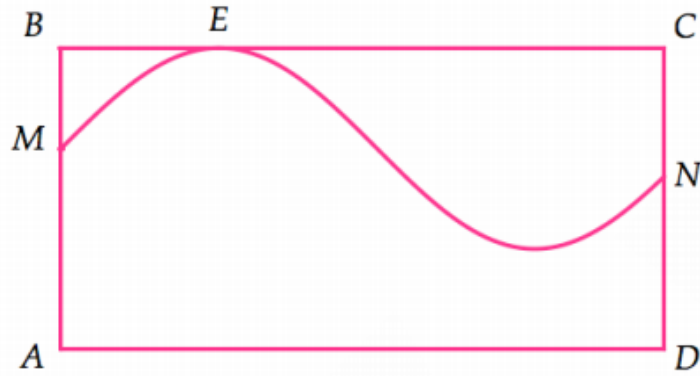
Ta có: Parabol có đỉnh $I(0; 40)$ và qua $A(50; 30)$.

Nên có phương trình $y = -\frac{1}{250}x^2 + 40$.

Thể tích của trống là.

$$V = \pi \int_{-50}^{50} \left(-\frac{1}{250}x^2 + 40 \right) dx = \pi \cdot \frac{406000}{3} cm^3 \approx 425dm^3.$$

Câu 43: Từ một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 30cm$, $AD = \frac{55\pi}{3}cm$. Người ta cắt miếng tôn theo đường hình sin như hình vẽ bên để được hai miếng tôn nhỏ. Biết $AM = 20cm$, $CN = 15cm$, $BE = 5\pi cm$. Tính thể tích của lọ hoa được tạo thành bằng cách quay miếng tôn lớn quanh trục AD (đơn vị dm^3) (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 83,8

Chọn hệ trục Oxy sao cho $A \equiv O$, $D \in Ox$, $B \in Oy$.

Ta có $BE = 5\pi$ suy ra hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 20\pi$.

Suy ra phương trình đồ thị hình sin cần tìm có dạng: $y = a \sin\left(\frac{x}{10}\right) + b$.

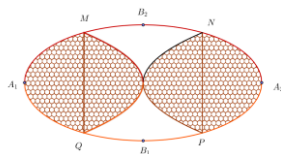
Do đồ thị hình sin đi qua $M(0; 20)$, $N\left(\frac{55\pi}{3}; 15\right)$ nên ta có:

$$\begin{cases} a \sin\left(\frac{1}{10} \cdot 0\right) + b = 20 \\ a \sin\left(\frac{1}{10} \cdot \frac{55\pi}{3}\right) + b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 20 \end{cases}.$$

Ta có phương trình đồ thị hình sin cần tìm là $y = 10 \sin\left(\frac{x}{10}\right) + 20$.

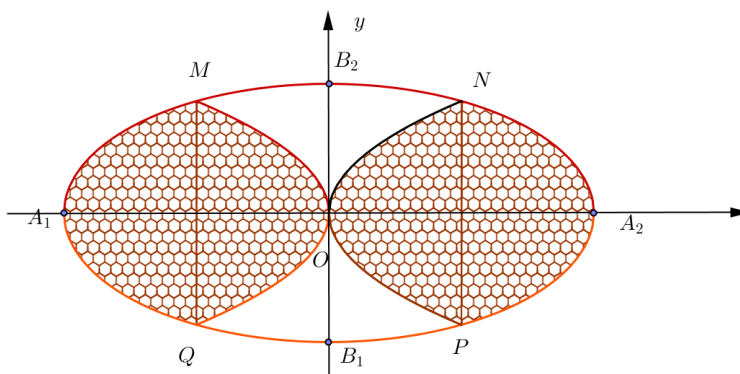
Thể tích cần tìm là: $\pi \int_0^{\frac{55\pi}{3}} \left(10 \sin\left(\frac{x}{10}\right) + 20\right)^2 dx \approx 83788 \text{ cm}^3 \approx 83,8 \text{ dm}^3$.

Câu 44: Mảnh vườn nhà ông An có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Ông dùng 2 đường Parabol có đỉnh là tâm đối xứng của elip cắt elip tại 4 điểm M, N, P, Q như hình vẽ sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MN = 4$ để chia vườn. Phần tô đậm dùng để trồng hoa và phần còn lại để trồng rau. Biết chi phí trồng hoa là 600.000 đồng/m² và trồng rau là 50.000 đồng/m². Hỏi số tiền phải chi gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8 \text{ m}$, $B_1B_2 = 4 \text{ m}$? (đơn vị nghìn đồng)



Lời giải

Trả lời: 4889



Giả sử phương trình elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} A_1A_2 = 8 \\ B_1B_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 \\ 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{16 - x^2}$.

Diện tích của elip (E) là $S_{(E)} = \pi ab = 8\pi \text{ (m}^2\text{)}$.

Ta có: $MN = 4 \Rightarrow \begin{cases} M = (P) \cap (E) \\ N = (P) \cap (E) \end{cases} \Rightarrow N(2; y_0)$. Do $N \in (E) \Rightarrow N(2; \sqrt{3})$.

(P) đỉnh O và đi qua $N \Rightarrow (P): x = \frac{2}{3}y^2 \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{x}$

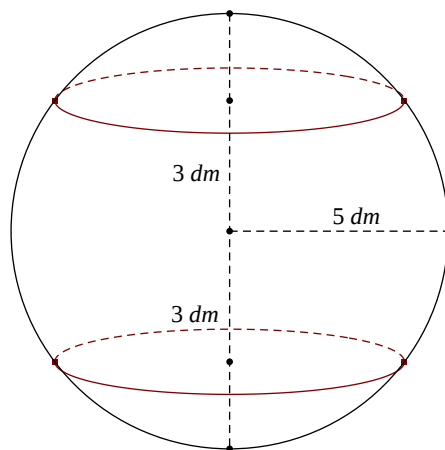
Khi đó, diện tích phần không tô màu là $S = 4 \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{16 - x^2} - \frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{x} \right) dx = 4 \frac{2\pi - \sqrt{3}}{3} \text{ (m}^2\text{)}$.

Diện tích phần tô màu là $S' = S_{(E)} - S = 8\pi - 4 \frac{2\pi - \sqrt{3}}{3} = \frac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3}$.

Số tiền phải chi theo yêu cầu bài toán là

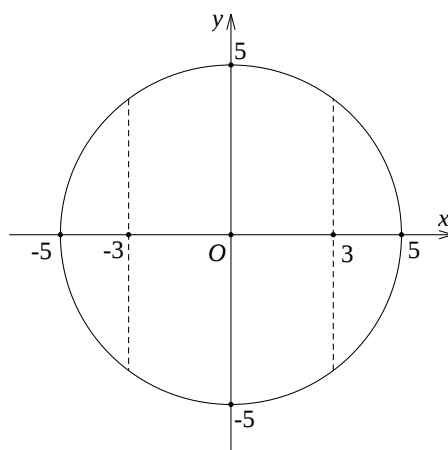
$$T = 600.000 \times \frac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3} + 50.000 \times 4 \frac{2\pi - \sqrt{3}}{3} \approx 4.889.000 \text{ đồng.}$$

Câu 45: Người ta làm một cái lu đựng nước bằng cách cắt bỏ 2 chỏm của một khối cầu có bán kính 5 dm bằng 2 mặt phẳng vuông góc với đường kính và cách tâm khối cầu 3 dm. Tính thể tích của chiếc lu. (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 415



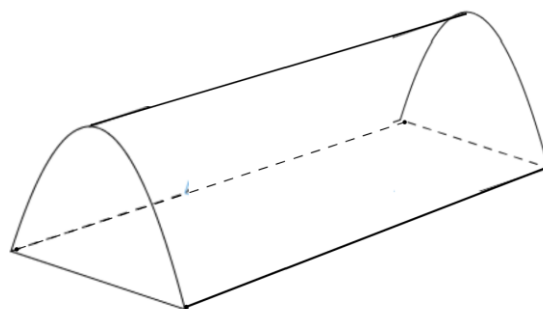
Đặt hệ trục với tâm O là tâm của mặt cầu, đường thẳng đứng là Ox , đường ngang là Oy .

Ta có phương trình của đường tròn lớn là $x^2 + y^2 = 25$.

Thể tích cái lu là thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình giới hạn bởi các đường cong $y = \sqrt{25 - x^2}$, trục Ox , đường thẳng $x = -3, x = 3$ quay quanh Ox .

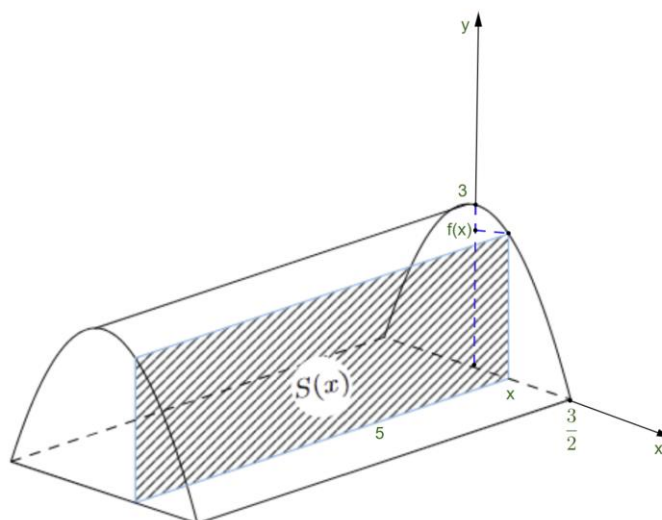
$$V = \pi \int_{-3}^3 (25 - x^2) dx = \pi \left(25x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^3 = 132\pi (\text{dm}^3) \approx 415 (\text{dm}^3).$$

Câu 46: Nhân dịp đi dã ngoại, lớp 12a dự kiến dựng một cái trại có dạng hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 5 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Thể tích phần không gian bên trong lều trại bằng bao nhiêu mét khối?



Lời giải

Trả lời: 30



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, hình dạng khung trãi là parabol có phương trình $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, vì đỉnh trãi cao 3m và bề ngang rộng 3m nên parabol đi qua điểm $(0; 3)$ và $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

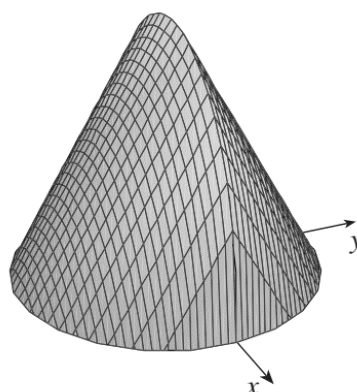
$$\text{Ta có: } \begin{cases} b = 0 \\ 3 = c \\ 0 = a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -\frac{4}{3} \\ c = 3 \end{cases}$$

Suy ra parabol có phương trình $y = f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 3$.

Mỗi mặt phẳng vuông góc Ox tại điểm có hoành độ $x, 0 \leq x \leq h$ cắt khối chót theo mặt cắt là hình chữ nhật có độ dài các cạnh lần lượt là 5 và $|f(x)|$, có diện tích $S(x) = 5 \cdot |f(x)|$, với $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

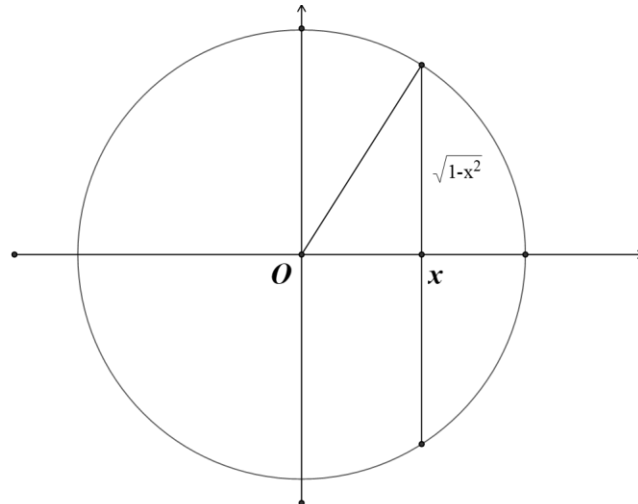
Vậy thể tích phần không gian trong trãi là $V = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} 5 \cdot |f(x)| dx = 5 \cdot \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left| -\frac{4}{3}x^2 + 3 \right| dx = 30 \text{ m}^3$.

Câu 47: Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1. Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) thì được thiết diện là một tam giác đều. Tính thể tích V của vật thể đó. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Lời giải

Trả lời: 2,31



Do vật thể có đáy là đường tròn và khi cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox được thiết diện là tam giác đều do đó vật thể đối xứng qua mặt phẳng vuông góc với trục Oy tại điểm O .

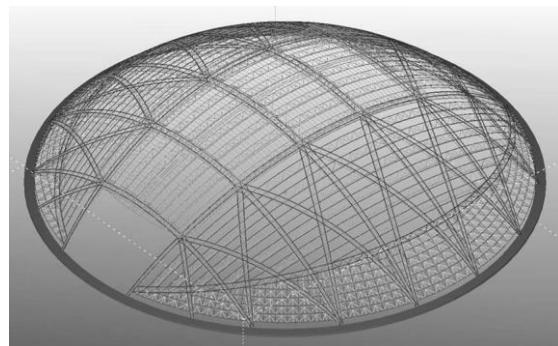
Cạnh của tam giác đều thiết diện là: $a = 2\sqrt{1-x^2}$.

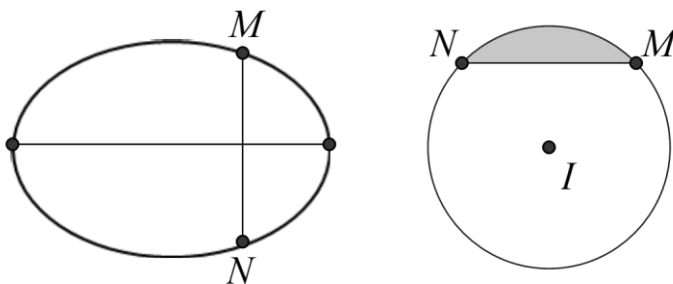
Diện tích tam giác thiết diện là: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = (1-x^2)\sqrt{3}$.

Thể tích khối cần tìm là:

$$V = 2 \int_0^1 S dx = 2 \int_0^1 \sqrt{3}(1-x^2) = 2\sqrt{3} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2,31.$$

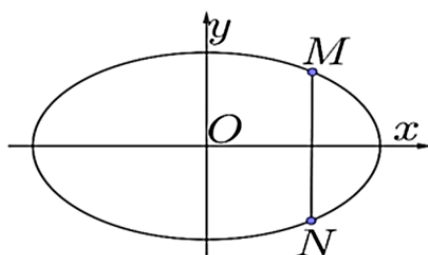
Câu 48: Sân vận động Sport Hub là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$. Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I với MN là một dây cung và góc $MIN = 90^\circ$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích bằng bao nhiêu? (đơn vị dam^3) (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)





Lời giải

Trả lời: 116



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

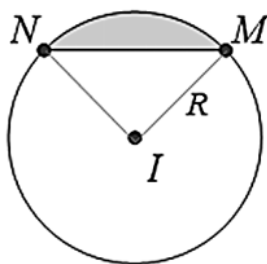
Phương trình chính tắc của E-líp đáy:

$$(E): \frac{x^2}{75^2} + \frac{y^2}{45^2} = 1.$$

$$\text{Gọi } M(x; y) \Rightarrow MN = 2y = 2\sqrt{45^2 \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)} = 90\sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{MN}{\sqrt{2}} = \frac{90}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}} \Rightarrow R^2 = \frac{90^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right).$$

Ta có công thức diện tích hình quạt: $S_{\text{quạt}} = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$ với α là số đo góc ở tâm chắn cung tương ứng.



Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện, ta có:

$$S(x) = S_{\text{quạt}} - S_{\triangle IMN} = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\right)R^2 = (\pi - 2) \frac{2025}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right).$$

Thể tích khoảng không gian sản vận động là

$$V = \int_{-75}^{75} (\pi - 2) \frac{2025}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right) dx \approx 115586 m^3 \approx 116 dam^3.$$